第 1 节 向量的基本运算（★★）

内容提要

本节归纳与向量共线、向量数量积的定义、向量的模有关的小题，下面先梳理一些会用到的知识点.

1．平面向量的概念：在平面上，既有大小，又有方向的量叫做向量. 向量的大小即为向量的长度，也称向量的模.

2．零向量：长度为 0 的向量，零向量的方向是任意的.

3．单位向量：长度为 1 个单位的向量.

4．相反向量：长度相等，方向相反的两个向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量记作 $-\boldsymbol{a}$.

5．共线向量：若表示若干平面向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做共线向量，或平行向量；规定零向量与任意向量共线.

6．线性运算：

①加法：如图 1，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$；

②减法：如图 1，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$；

③数乘：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，长度等于 $\lambda|\boldsymbol{a}|$ 的向量；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，长度等于 $|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$ 的向量；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 等于零向量.

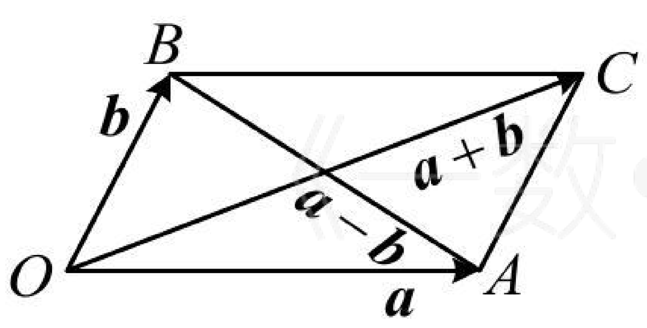


图1

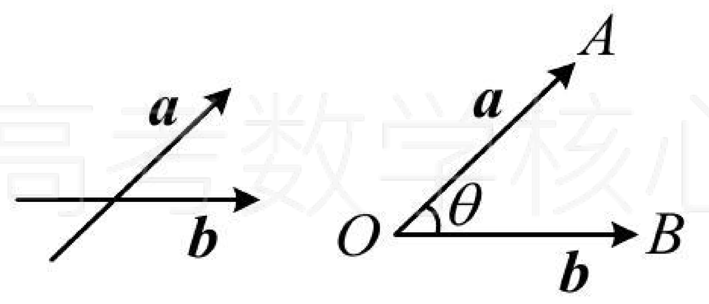


图2

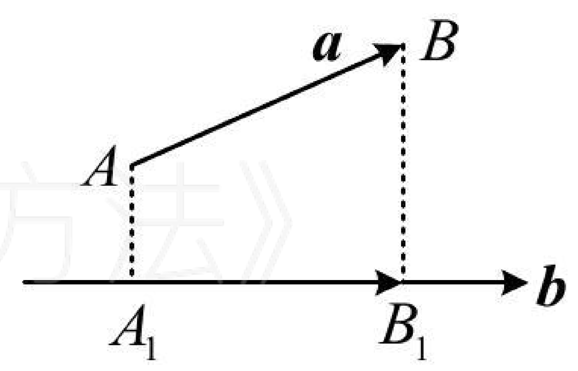


图3

7．线性运算的运算律：

①交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

②结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

③分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

8．共线向量定理：对于平面上任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

9．向量的夹角：如上图 2，将向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 平移至同一起点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，即 $\angle AOB=\theta$. 向量的夹角 θ 一定满足 $0\le\theta\le\pi$；当 $\theta=0$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=\pi$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 反向；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

10．向量的数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$.

11．夹角余弦公式：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$，向量问题中涉及角度，常用该公式处理.

12．数量积的性质：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，它们的夹角是 θ，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$；

②$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0^{\circ}=|\boldsymbol{a}|^{2}$，简记为 $\boldsymbol{a}^{2}=|\boldsymbol{a}|^{2}$，我们常用这一公式将向量的模转化为数量积来计算；

④ $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

13．数量积的运算律：对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；② $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；③ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

14．投影向量：如上图 3，过向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 作向量 $\boldsymbol{b}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，则 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，设 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则 $\overrightarrow{A_1B_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}$.

典型例题

类型Ⅰ：共线向量定理的应用

【例 1】已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$ 的方向相反，则实数 λ 的值为（　　）

（A）1　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）1 或 $-\dfrac{1}{2}$　（D）-1 或 $-\dfrac{1}{2}$

解析：方向相反属共线的情形，可用共线向量定理处理，

因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$ 方向相反，所以存在 $\mu<0$，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu[\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}]$，

整理得：$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}+\mu(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}\lambda=\mu\\1=\mu(2\lambda-1)\end{cases}$，解得：$\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 或 1，又 $\lambda=\mu<0$，所以 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

答案：B

【变式】设 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1+k\vec{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=5\vec{e}_1+4\vec{e}_2$，$\overrightarrow{DC}=-\vec{e}_1-2\vec{e}_2$，且 A，B，D 三点共线，则实数 $k=$______.

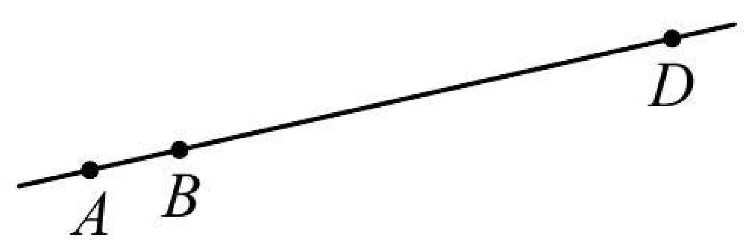
解析：A，B，D 三点共线可用向量共线翻译，即存在 λ 使 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，故将 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 用 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 表示，

由题意，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\vec{e}_1+k\vec{e}_2+5\vec{e}_1+4\vec{e}_2-(-\vec{e}_1-2\vec{e}_2)=7\vec{e}_1+(k+6)\vec{e}_2$，

因为 A，B，D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线，故存在实数 λ 使 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $7\vec{e}_1+(k+6)\vec{e}_2=\lambda\vec{e}_1+\lambda k\vec{e}_2$，所以 $\begin{cases}7=\lambda\\k+6=\lambda k\end{cases}$，解得：$k=1$.

答案：1



类型Ⅱ：模的常见处理方法

【例 2】已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$______.

解析：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 知道长度和夹角，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可求，故将 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$ 平方，转化为数量积来算，

由题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=2\times1\times\cos60^{\circ}=1$，

所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=2^2-4\times1+4\times1^2=4$，故$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2$.

答案：2

【变式 1】（2023·新高考Ⅱ卷）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{b}|=$_____.

解析：条件涉及两个模的等式，想到把它们平方来看，

由题意，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$ ①，

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，故$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，整理得：$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

代入①可得$\boldsymbol{b}^2=3$，即$|\boldsymbol{b}|^2=3$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

【变式 2】平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，对任意的实数$t$，$\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$恒成立，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为_____；$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$的最小值为_____.

解析：给了模的不等式，先试试平方去掉模，看能得到什么，

设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，因为$\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$恒成立，所以$\left|\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|^2\le|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2$，

故$\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le\boldsymbol{a}^2+t^2\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

结合$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$可得$\frac{5}{4}-\cos\theta\le1+t^2+2t\cos\theta$，整理得：$t^2+(2\cos\theta)t+\cos\theta-\frac{1}{4}\ge0$ ①，

此为关于t的一元二次不等式恒成立问题，考虑判别式即可，不等式①应有$\Delta=4\cos^2\theta-4\cos\theta+1\le0$，

即$(2\cos\theta-1)^2\le0$，所以只能$2\cos\theta-1=0$，故$\cos\theta=\frac{1}{2}$，结合$0\le\theta\le\pi$可得$\theta=\frac{\pi}{3}$；

由条件得到了θ，再求$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$的最小值，包含模优先考虑平方，发现可化为关于$t$的函数，

$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2+t^2\boldsymbol{a}^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+t^2-2t|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，

所以当$t=\frac{1}{2}$时，$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|^2$取得最小值$\frac{3}{4}$，故$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【总结】涉及模的问题，一般考虑将模平方，因为这样可以去掉模，以及沟通数量积、夹角.

类型Ⅲ：数量积定义式的应用

【例 3】（2021·浙江卷）已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析：先看充分性，可将两个数量积用定义表示出来再分析，

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角分别为 α ，β ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 即为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\alpha=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\beta$，所以 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\alpha=|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\beta$，不能得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，故充分性不成立；而当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ ，所以必要性成立，故选 B.

答案： B

【反思】 向量的数量积的运算满足分配律，但不能对向量约分，即不能在 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 两端把 $\boldsymbol{c}$ 约掉.

【例 4】已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，则 $k=$_____.

解析： $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ 可用数量积翻译，由题意，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k^2\boldsymbol{b}^2=0$ ①，

故只需求 $\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{b}^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 既有长度，又有夹角，所以都能算，

由题意，$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=16$，$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=4\times2\times\cos60^{\circ}=4$，

代入①整理得：$-4k^2+4k+32=0$，解得：$k=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$.

答案： $\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$

【反思】 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

【例 5】（2021·新高考Ⅱ卷）已知向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$_____.

解法 1： 涉及三个向量的关系，且已知模长，考虑消去一个，常用移项再平方的方法，

由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{c}^2=(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

又 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，所以 $4=1+4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$，

同理，将 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 分别平方可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{7}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{9}{2}$.

解法 2： 观察发现直接将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 平方，就会产生目标式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=9+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{9}{2}$.

答案： $-\dfrac{9}{2}$

【反思】 给出三个向量的线性方程，可考虑移项再平方（解法 1），消去一个并产生另外两向量的数量积.

【例 6】若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为_____.

解析： 向量问题中涉及夹角，一般考虑夹角余弦公式，先算它们的数量积，看看还差什么，

不妨设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|=2k(k>0)$，则 $|\boldsymbol{a}|=k$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ①，

故需计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，可把 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 平方，因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，

从而 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，代入①得：$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=k^2$，

设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\theta(0\le\theta\le\pi)$，则 $\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{k^2}{2k\cdot k}=\dfrac{1}{2}$，结合 $0\le\theta\le\pi$ 可得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

答案： $\dfrac{\pi}{3}$

【反思】向量问题中涉及角度，一般用夹角余弦公式 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$ 来求.

强化训练

1.（★）（多选）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

（B）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线是异面直线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定不共面

（C）若 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量

（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则“$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的充分不必要条件

2.（2023•山西临汾模拟•★）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量，$\overline{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overline{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overline{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则（　　）

（A）A，B，C 三点共线　　（B）A，B，D 三点共线

（C）B，C，D 三点共线　　（D）A，C，D 三点共线

3.（2022•全国乙卷•★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

4.（★★）（多选）下列命题正确的是（　　）

（A）$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（B）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件

（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向

5.（2022 • 陕西西安模拟 • ★）已知向量 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，则实数 $\lambda=$_____.

6.（★★）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____.

7.（2023 • 江苏高邮模拟改 • ★★★）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=4$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围为 $[-2,2]$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的取值范围是（　　）

（A）$[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$　（B）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$　（C）$[0,\dfrac{2\pi}{3}]$　（D）$[0,\dfrac{5\pi}{6}]$

8.（2023 • 安徽模拟 • ★★★）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是单位向量，且它们的夹角为 θ，若 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|\ge\dfrac{1}{2}(t\in\mathbf{R})$，则 θ 的取值范围为（　　）

（A）$[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$　（B）$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$　（C）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$　（D）$[0,\dfrac{\pi}{6}]$